6. Theorie van zonnevlammen

M. Kuperus

We zullen in dit college uitsluitend die theorieën bespreken, die er van uitgaan, dat de energie die bij een vlam vrijkomt energie is die in magnetische velden is opgeslagen. Het probleem van de zonnevlam valt dan uiteen in vier deelproblemen, nl.:

1. de opslag van energie in magnetische velden;
2. de energievrijmaking door een magnetohydrodynamische instabiliteit;
3. de reconnectie van magnetische velden en de vorming van een veldconfiguratie met een lagere energie;
4. de versnelling van deeltjes die tijdens de processen in 2) en 3) optreedt.

6.1. De opslag van energie in magnetische velden

Een potentiaalveld $\underline{B} = \nabla\Phi$ is de toestand met minimale energie als de potentiaalverdeling op de rand van een systeem is gegeven. Het is duidelijk dat in een potentiaalveld geen stromen lopen omdat

$$\underline{j} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \underline{B} = \nabla \times \nabla\Phi = 0 \,. \tag{1}$$

Ieder niet-potentiaal veld bevat meer energie, Deze energie of vrije energie zit precies in de stromen j . In vacuum kunnen geen stromen lopen en daarom is ieder vacuum veld een potentiaal veld.

De magnetische energie in een volume V is

$$W_M = \int_V \frac{B^2}{8\pi} dV \,, \tag{2}$$

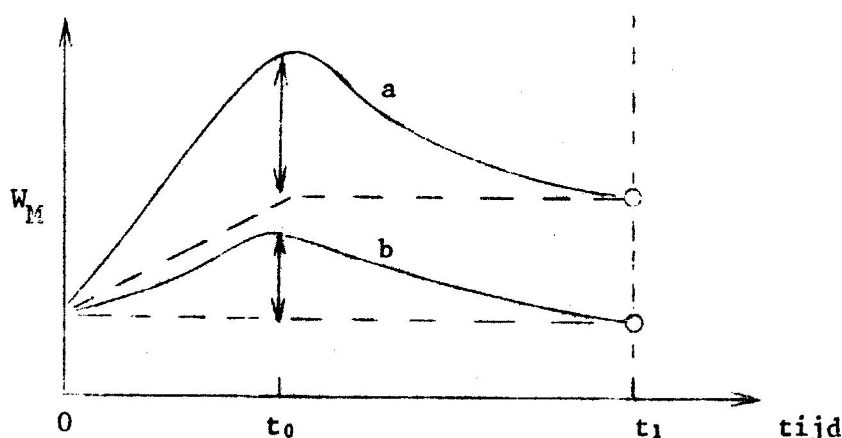
De enige manier om W_M te vergroten is $\underline{B}$ te vergroten. Dit kan op twee manieren gebeuren nl.

a. door de veldsterkte op de rand te vergroten
   (eigenlijk de flux vergroten);
b. door zonder fluxvergroting de polariteiten anders te verdelen.

In het eerste geval zal het duidelijk zijn dat weer een potentiaalveld kan worden verkregen echter met een grotere energie-inhoud.
Dit nieuwe veld bezit evenwel geen vrije energie. De energietoevoer zit in het mechanisme dat $\underline{B}$ op de rand heeft vergroot.

In een plasma gaat vergroting van de veldsterkte (of flux) altijd gepaard met compressie als het plasma zeer goed geleidend is en alleen bewegingen die met compressie gepaard gaan kunnen zo tot een potentiaalveld met hogere energie aanleiding geven.

In het tweede geval heeft men alleen met redistributie van de polariteiten te maken of strikter met beweging van de voetpunten van de krachtlijnen. We moeten goed bedenken dat in een ideaal plasma ($\sigma = \infty$) de krachtlijnen niet slechts een mathematisch concept zijn maar een materiële betekenis hebben waarmee zeer goed kan worden gewerkt. In het geval b) is het niet zonder meer duidelijk of de energie toeneemt of niet. De uiteindelijke potentiële veldconfiguratie zal evenveel energie bevatten als de aanvankelijke. Wel zal tussen de begintoestand en de eindtoestand die beide een potentiaalveld zijn het veld zich in een hogere energietoestand kunnen bevinden:



figuur 1

In bovenstaande figuur is schetsmatig aangegeven hoe de magnetische energie verandert als men de flux verhoogt (a) en als men de flux constant houdt maar de voetpunten beweegt (b). De getrokken lijn geeft de energie in een niet-potentiaal veld en de onderbroken lijn die in een potentiaal veld. Er is aangenomen dat $\sigma \neq \infty$ zodat tenslotte de energie in het veld die van een potentiaal veld wordt. De tijd t_0 is de tijd gedurende welke het mechanisme van energietoevoer aan het veld werkzaam is: de opslagtijd, terwijl de tijd t_1 de karakteristieke tijd is voor het afvloeien van de magnetische energie. Om energie in een vled te kunnen opslaan moet gelden

$$t_1 > t_0 \; . \qquad (3)$$

Om echter in een korte tijd de vrije energie uit het veld te krijgen (dus $\Delta t \ll t_0$) moet zich een bijzondere situatie voordoen die we een instabiliteit noemen. We gaan daar in § 2 op in.

De toename van W_M wordt beschreven door (2) naar t te differentiëren en gebruik te maken van de MHD-vergelijking

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \nabla \times \underline{v} \times \underline{B} + (4\pi\sigma)^{-1} \nabla^2 \underline{B} . \tag{4}$$

Vergelijking (2) wordt dan

$$\frac{\partial W_M}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_V \{ \underline{B} . (\nabla \times \underline{v} \times \underline{B}) + (4\pi\sigma)^{-1} \underline{B} . \nabla^2 \underline{B} \} dV . \tag{5}$$

Nu geldt met behulp van de vectorrelaties:

$$\frac{1}{4\pi} \int (4\pi\sigma)^{-1} \underline{B} . \nabla^2 \underline{B} \, dV = - (4\pi\sigma)^{-1} \int (\underline{B} . \nabla \times \underline{j}) \, dV =$$

$$= - (4\pi\sigma)^{-1} \int [\nabla . (\underline{j} \times \underline{B}) + (\alpha \times \underline{B}) . \underline{j}] \, dV =$$

$$= - \int \frac{j^2}{\sigma} dV , \tag{6}$$

omdat de eerste term tussen vierkante haakjes verdwijnt na integratie over V hetgeen men inziet door de stelling van Green toe te passen:

$$\int_V \nabla . \underline{A} \, dV = \int_S \underline{A} . \underline{dS} = 0 \quad \text{als } \underline{A} = 0 \text{ op } S . \tag{7}$$

De tweede term in (5) stelt de energie voor die in warmte is omgezet t.g.v. het eindige geleidingsvermogen.
Op dezelfde manier kan men de eerste term in (5) m.b.v. de stelling van Green omzetten in

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \{ \nabla . [\underline{v} \times \underline{B} \times \underline{B}] + (\underline{v} \times \underline{B}) . \nabla \times \underline{B} \} dV = \int_V (\underline{j} \times \underline{B}) . \underline{v} \, dV . \tag{8}$$

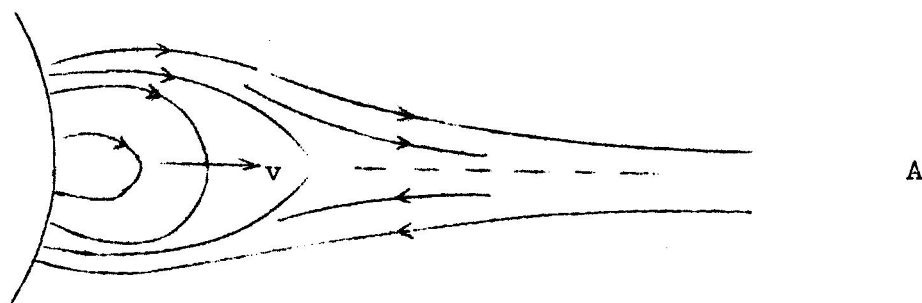
Vergelijking (5) wordt nu

$$\frac{\partial W_M}{\partial t} = \int_V (\underline{j} \times \underline{B}) . \underline{v} \, dV - \int \frac{j^2}{\sigma} dV , \tag{9}$$

waarin de eerste term de arbeid is die moet worden verricht om met een snelheid $\underline{v}$ tegen de Lorentzkracht $\underline{j} \times \underline{B}$ te werken. De eerste term stelt de energietoevoer aan het magnetische veld voor en de tweede term de energieafvoer. Let wel op dat (9) is afgeleid onder de veronderstelling dat $\underline{j} = 0$ buiten een vast oppervlak. Als de stromen zich tot buiten dit oppervlak uitbreiden komt er nog een derde term bij die het energieverlies door golven naar buiten voorstelt. Wij zullen dit effect voorlopig verwaarlozen en nu enige gevallen bespreken waarbij energie-opslag in coronale magneetvelden mogelijk is.

Uit vgl. (9) volgt direct dat energie-opslag zeer goed mogelijk wordt als het plasma goed geleidend is (zoals in de corona) en het gebied waarbinnen de stromen vloeien beperkt blijft.

Het eerste geval is dat van het uitrekken van een bipolair magnetisch veld door radiale stroming zoals bijv. de zonnewind.



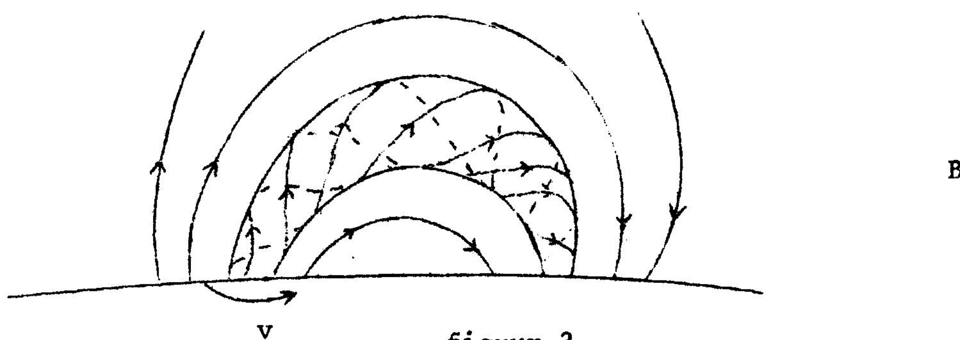
figuur 2

Bij het uitrekken ontstaat een stroomlaag die kan overgaan in een neutrale laag. Hwr openen van de veldlijnen wordt ten naaste bij bepaald door de hoogte waarop de snelheid gelijk wordt aan de Alfvén snelheid

$$\underline{v} = v_A = \frac{B}{(4\pi\rho)^{\frac{1}{2}}} .$$

Deze veldconfiguratie vertoont veel overeenkomst met de magnetosfeer.

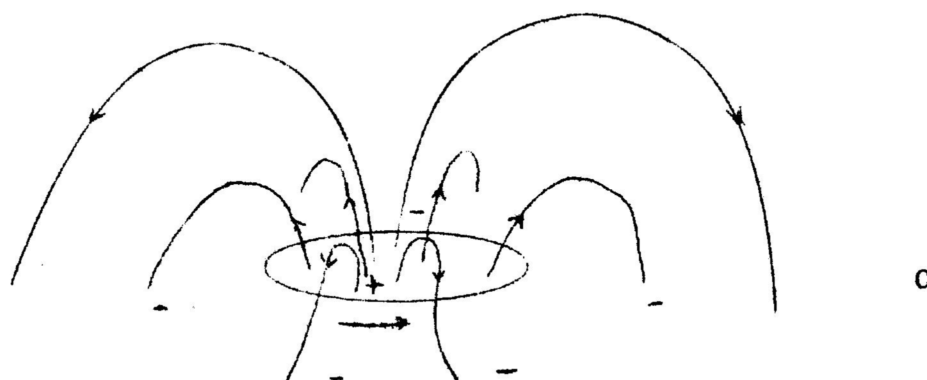
Het tweede geval is het opwikkelen van een magnetische veldbuis door fotosferische bewegingen.



figuur 3

Hier wordt een stroom langs de veldlijnen opgewekt zodat behalve een axiale component B_z een azimuthale component B_ϕ aanwezig is. De extra energie zit in het azimuthale veld.

Het derde geval is dat van een roterende magnetische vlek in een omgeving van tegengestelde polariteit.

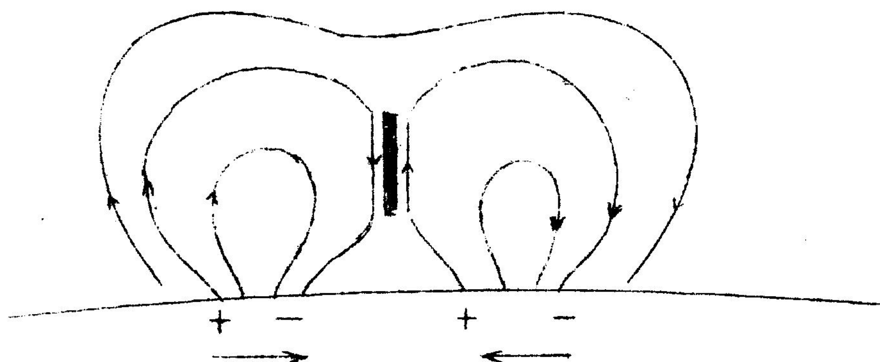


figuur 4

Ook nu wordt het veld opgewikkeld en zal het zich ontwikkelen via een aantal evenwichtstoestanden zoals krachtvrije velden, waarop we nog terug komen.

Al deze configuraties hebben model gestaan in zonnevlamtheorieën: het eerste model (A) in de theorie van Sturrock, het tweede model (B) in de theorie van Gold en Hoyle en in die van Alfvén en Carlquist en het derde model (C) in de theorie van Barnes en Sturrock. We zullen later nog laten zien dat in alle modellen tenslotte een sterke stroomlaag optreedt waar de dissipatie van de in het veld opgeslagen energie plaatsvindt.

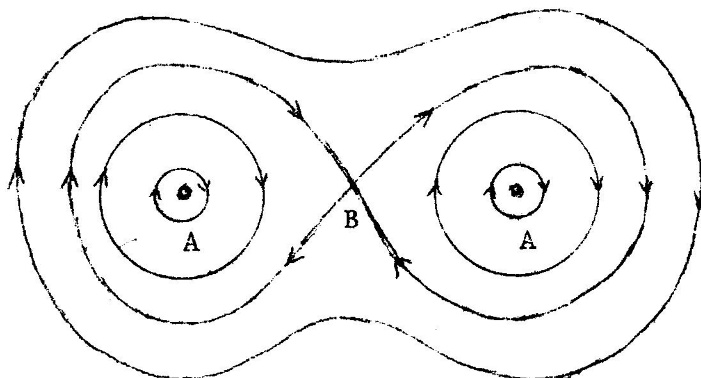
Naast de bipolaire magnetische veldconfiguraties zijn er ook theorieën die gebruik maken van quadrupool velden. Een voorbeeld hiervan is de theorie van Sweet, waar twee bipolaire magnetische gebieden naar elkaar worden toebewogen. Wanneer die beweging snel plaatsvindt ontstaat een magnetische neutrale laag waarin de energie, nodig om het veld te verplaatsen, wordt opgeslagen.



figuur 5

Het verschil met de vorige theorieën is dat nu de voetpunten in bipolaire paren t.o.v. elkaar worden bewogen. Van energie-opslag is pas sprake als de beweging van het ene bipolaire gebied wordt bemoeilijkt door aanwezigheid van het andere.

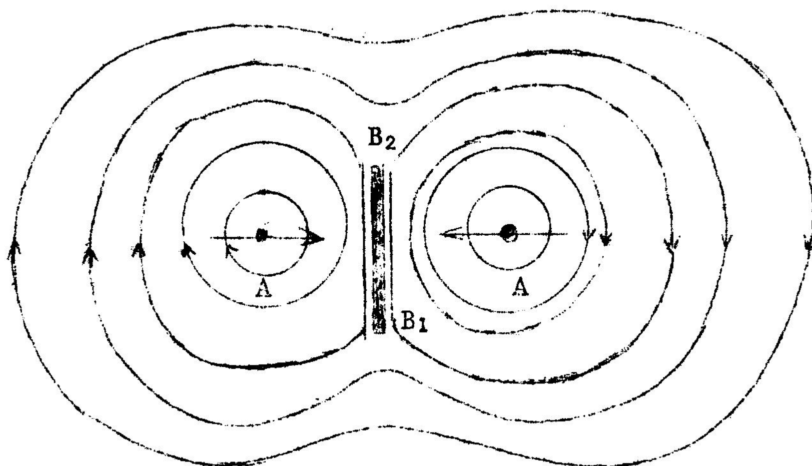
De theorie van Syrovatskii over dynamische dissipatie is een variant van de theorie van Sweet, waarbij in plaats van twee bipolaire gebieden gebruik wordt gemaakt van twee evenwijdige stromen (in punten A).



figuur 6

In punt B is een X-type neutraal punt. De veldconfiguratie in bovenstaande figuur is het potentiaal veld van twee evenwijdige stroomdraden met gelijke stroomsterkte.
Let er op dat de veldrichtingen in het neutrale punt loodrecht op elkaar staan. Een loodrechte stand van de veldasymptoten in B is kenmerkend voor een minimale energie.

Veronderstel dat nu de stromen in A naar elkaar toe bewegen. Dat is niet zo moeilijk omdat gelijkgerichte stromen elkaar aantrekken. Dan zal bij langzame toenadering dezelfde veldconfiguratie blijven bestaan als in figuur 6. Bewegen we de stromen sneller dan de diffusiesnelheid naar elkaar toe, dan kan reconnectie niet snel genoeg plaatsvinden en hopen plasma en magnetisch veld zich op in een neutrale laag.



figuur 7

De neutrale laag B_1B_2 bevat in feite een stroomsysteem dat de toenadering van de stromen in A tegenwerkt. De invloed van het plasma is hier

een resistieve.

Het zal een ieder duidelijk zijn dat in stroomlagen veel energie kan worden opgeslagen. Toch zijn er meer bescheiden configuraties waarin ook energie kan worden opgeslagen, maar in minimale hoeveelheden: dit zijn de z.g. krachtvrije velden waarvoor geldt dat overal de Lorentzkracht $\underline{j} \times \underline{B} = 0$.

In feite kan men alleen van een krachtvrij veld spreken als $p_g << \frac{B^2}{8\pi}$ dus als $\beta << 1$ omdat anders aan de magnetohydrostatische vergelijking moet worden voldaan.

$$\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} = 0 . \tag{10}$$

Velden die aan bovenstaande vergelijking voldoen heten ook wel Lundquist velden.

Als $\beta << 1$ wordt (10):

$$(\nabla \times \underline{B}) \times \underline{B} = 0 , \tag{11}$$

waaruit volgt

$$\nabla \times \underline{B} = \alpha \underline{B} , \tag{12}$$

waarbij $\alpha(r)$ een constante is langs de veldlijnen, maar van veldlijn tot veldlijn kan veranderen. α geeft de grootte aan van de stroomdichtheid $\underline{j}$ langs het magnetische veld.

Splitst men het veld in een axiaal veld B_z en een azimuthaal veld B_ϕ , dan geldt voor B_ϕ

$$\int_0^{2\pi} B_\phi \, r \, d\phi = \iint_{\pi r^2} j \, ds . \tag{13}$$

Dus $B_\phi = j \frac{r}{2}$ (14)

als j is constant

en $B_\phi = \frac{r_0{}^2 \, j}{2} \frac{1}{r}$ (15)

voor $r > r_0$ als $j = 0$ voor $r > r_0$.

Het azimuthale veld B_ϕ valt dus af met $\frac{1}{r}$ buiten een stroomfilament en het is daarom niet mogelijk een krachtvrij filament of een krachtvrije fluxbuis als zelfstandige eenheid met radius r_0 te beschouwen en te veronderstellen dat daarbuiten geen magnetisch veld is.

Om over een fluxbuis te kunnen spreken heeft men òf een stroomlaag rond de buis nodig òf een voldoende hoge gasdruk buiten de buis, zodat vgl. (10) kan gelden.

De "vrije" energie zit in het veld B_ϕ .

$$\Delta W = \int \frac{B^2\phi}{8\pi} dV . \tag{16}$$

Een fundamentele vraag is onder welke omstandigheden een niet potentiaal veld stabiel is.

Het ligt voor de hand deze vraag eerst te stellen voor de krachtvrije velden.

Als krachtvrije velden stabiele velden zijn, is het mogelijk door een serie van evenwichtstoestanden in een hogere energetische toestand te komen zonder dat door een instabiliteit de extra energie het systeem weer verlaat. Dit blijkt geen eenvoudig probleem te zijn en slechts in bepaalde gevallen kan hierop een antwoord worden gegeven. Er zijn enkele manieren om dit probleem aan te pakken. Het komt er in het algemeen op neer dat men een energie-integraal W opstelt en een storing $\underline{\xi}$ in het systeem aanbrengt en de door $\underline{\xi}$ veroorzaakte storing δW in de energie-integraal uitrekent. Als $\delta W < 0$ is de toestand instabiel. Dit geldt alleen voor systemen met potentiële energie (dus $\underline{v} = 0$) .

Bernstein, Frieman, Kruskal en Kulsrud, Proc. Roy. Soc. A 244, 17 (1958) vonden dat een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor stabiliteit is dat de energie variatie

$$\delta W = \tfrac{1}{2} \int dV \left[\underline{Q}^2 - \underline{j} \cdot \underline{Q} \times \underline{\xi} + \gamma p \, (\nabla . \underline{\xi})^2 + (\nabla . \underline{\xi}) \, (\underline{\xi} . \nabla p) \right] > 0 \tag{17}$$

met

$$\underline{Q} = \nabla \times (\underline{\xi} \times \underline{B}) , \tag{18}$$

vooropgesteld dat $\underline{\xi}.\underline{n} = 0$ op de rand van het volume V , $\underline{n}$ is de normaal vector. Het zij hier opgemerkt dat (17) een tweede orde integraal is. Dit is zeer belangrijk omdat een eerste orde integraal voor krachtvrije velden altijd $\delta W^1 = 0$ geeft; immers

$$\delta W^1 = \int_V \frac{\underline{B} \cdot \delta \underline{B}}{4\pi} dV = \int_V \frac{\underline{B} \cdot \nabla \times \underline{\xi} \times \underline{B}}{4\pi} dV . \tag{19}$$

Met $\nabla \cdot (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \cdot \nabla \times \underline{a} - \nabla \times \underline{b} \cdot \underline{a}$ volgt uit (19)

$$\delta W^1 = \int_V \frac{(\nabla \times \underline{B}) \cdot (\underline{\xi} \times \underline{B})}{4\pi} dV + \int_V \frac{\nabla \cdot [(\underline{\xi} \times \underline{B}) \times \underline{B}]}{4\pi} dV . \tag{20}$$

Met de stelling van Stokes wordt de laatste integraal:

$$\frac{1}{4\pi} \int_V \nabla \times [(\underline{\xi} \times \underline{B}) \times \underline{B}] \cdot dV = \frac{1}{4\pi} \int_S (\underline{\xi} \times \underline{B}) \times \underline{B} \cdot d\underline{S} = 0 , \tag{21}$$

omdat $\underline{\xi} = 0$ op S . Er geldt dan voor δW^1 :

$$\delta W^1 = \frac{1}{4\pi} \int_V (\nabla \times \underline{B}) \cdot (\underline{\xi} \times \underline{B}) \, dV \, . \tag{22}$$

Voor een krachtvrij veld geldt (12) en dus is $\delta W^1 = 0$. Het toont aan dat krachtvrije velden met een minimale energie-inhoud zijn, maar zegt niets over de stabiliteit. Daarvoor moeten de tweede prde termen worden meegenomen. Een lineaire stabiliteitsanalyse kan in dit geval niet worden toegepast.

(Zie ook: Voslamber en Callebaut, Phys. Rev. 1962, vol. 128, 2016.)

Als $\underline{v} \neq 0$, kon door Frieman en Rotenberg (Rev. Mod. Phys. 1960, 32, 898) worden aangetoond dat als ξ de uitwijking uit de evenwichtstoestand is en $F(\xi)$ de kracht die t.g.v. de uitwijking ξ op het systeem werkt een voldoende voorwaarde voor stabiliteit is dat

$$\delta W = \int \underline{\xi} \cdot \underline{F}(\underline{\xi}) \, dV > 0 \, . \tag{23}$$

In een krachtvrij cylindrisch filament zorgt het axiale veld B_z er voor dat de stroom niet t.g.v. het B_ϕ veld kan pinchen. Deze toestand is stabiel tegen zuiver radiële storingen. Het veld $B_z \sim \frac{1}{r^2}$ en $B_\phi \sim \frac{1}{r}$.

Als we nu de straal vergroten met een factor a dan neemt B_z sterker af dan B_ϕ en zal het pinch-effect er voor zorgen dat de buis weer in de evenwichtsstand komt. Hetzelfde geldt voor een kleine compressie. Het axiale veld werkt dus stabiliserend tegen pinches.

6.2. Annihilatie van magnetische energie en reconnectie van veldlijnen

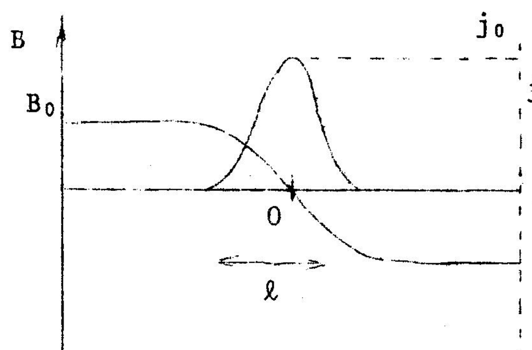
Bij het optreden van magnetohydrodynamische instabiliteiten kunnen hoge stroomdichtheden voorkomen, waardoor de dissipatie zeer sterk toeneemt. We zullen daarom eerst de annihilatie van magnetische energie als gevolg van het eindige geleidingsvermogen van het plasma bespreken en later op de eigenlijke instabiliteit terugkomen. Beschouwen we een neutrale laag met aan weerszijden magnetisch veld, dan is de stroomdichtheid j gegeven door

$$\underline{j} = -\frac{1}{4\pi}\frac{dB}{dx} . \qquad (1)$$

De diffusiesnelheid v_D is gegeven door

$$v_D = \frac{1}{4\pi\,\sigma\,\ell} , \qquad (2)$$

waarbij ℓ de "dikte" van de neutrale laag is.



figuur 8

De karakteristieke tijd waarmee de diffusie plaatsvindt is

$$\tau_D = 4\pi\,\sigma\,\ell^2 . \qquad (3)$$

Stel voor de eenvoud dat de stroomdichtheid een Gaussfunctie is

$$j = j_0\, e^{-\frac{x^2}{\ell^2}} , \qquad (4)$$

dan is de energiedissipatie per eenheid lengte langs de "sheet"

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j^2}{\sigma}\,dx = \frac{j_0^2}{\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2x^2}{\ell^2}}\,dx = \frac{j_0^2}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.\,\ell . \qquad (5)$$

Met

$$j_0 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{dB}{dx}\right)_{x=0} \approx \frac{B_0}{4\pi\,\ell} \qquad (6)$$

wordt (5):

$$W = \frac{B_0^2}{4\pi}\,\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4\pi\,\sigma\,\ell} \approx \frac{B_0^2}{8\pi}\,2\,.\,v_D\,. \qquad (7)$$

Dus de magnetische energie $\frac{B_0^2}{8\pi}$ die met snelheid v_D zowel van $-\infty$ als van $+\infty$ (factor 2) naar de neutrale laag diffundeert is precies de hoeveelheid gedissipeerde energie. Als S de effectieve oppervlakte van de stroomlaag is geldt voor de energiedissipatie

$$W_{tot} = \frac{B_0^2}{\pi}\,S\,.\,v_D\,. \qquad (8)$$

Stel dat de effectieve oppervlakte $S = 10^{19}$ cm^2, (misschien zelfs te groot), dan geldt met $W_{tot} = 10^{29}$ voor een grote zonnevlam

$$B_0^2\,v_D \approx 10^{11}\,. \qquad (9)$$

Met $B_0 = 100$ gauss volgt hieruit $v_D = 10^7$ cm/sec . Dit is vergelijkbaar met de Alfvén snelheid:

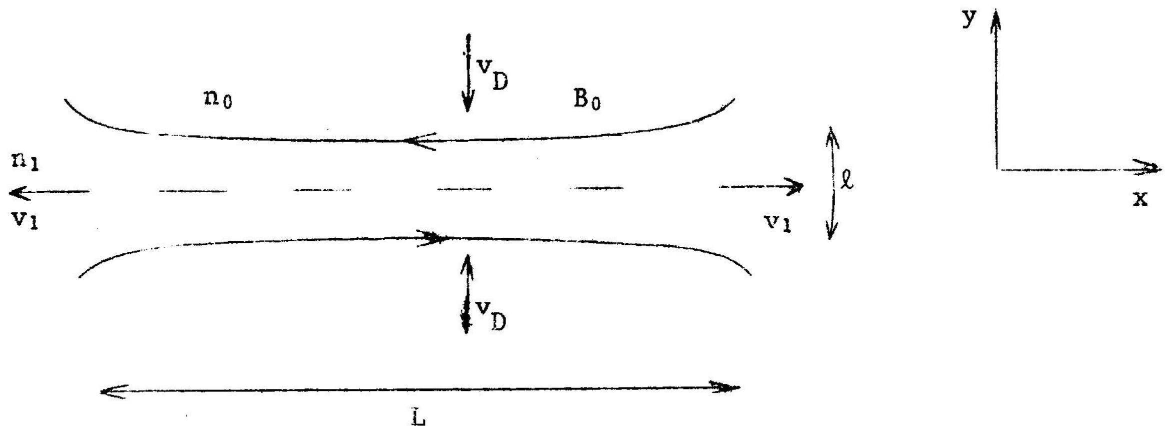
$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\,\rho}} = 3\,.\,10^7 \text{ cm/sec} \qquad (\rho = 10^{-14} \text{ g/cm}^3)\,,$$

hetgeen betekent dat door diffusie in een vlakke laag net kan worden voldaan aan de energie-eis. Anderzijds moeten we ons wel bedenken dat een diffusiesnelheid $v_D = 10^7$ cm/sec in een plasma met een geleidingsvermogen $\sigma = 10^{-6}$ een dikte geeft:

$$\ell = \frac{1}{4\pi\,\sigma\,v_D} = 10^{-2} \text{ cm}\,. \qquad (10)$$

Het lijkt erg onwaarschijnlijk dat zulke dunne lagen kunnen ontstaan.
De enige manier om een dikkere stroomlaag te krijgen is:
1) σ kleiner ; en
2) v_D kleiner.
We zullen in de volgende paragraaf zien dat er oorzaken zijn waarom σ kleiner is. v_D kleiner maken kan echter alleen als B_0 groter is.
Bijv. als $B_0 = 10^3$ gauss kan $v_D = 10^5$ cm/sec zijn.
Met $\sigma^* = 10^{-5}\,\sigma = 10^{-11}$ wordt $\ell = 10^5$ cm .

In bovenstaand sheet model wordt steeds meer materie naar het centrum toegebracht. Als men naar een stationaire oplossing zoekt blijkt dat in een ééndimensionaal model niet mogelijk. In twee dimensies wel. De toevoer van veld en materie gebeurt dan in de ene richting en de afvoer in de andere. De totale hoeveelheid energie die ter beschikking staat is nooit meer dan $\frac{B^2}{4\pi} v_d$ per oppervlakte eenheid, maar nu komt niet alle energie in warmte terecht maar ook een gedeelte in kinetische energie.



figuur 9

Laat weer ℓ de dikte van de stroomlaag zijn en L de lengte. Behoud van massa geeft voor een incompressibel medium

$$v_D L = v_1 \ell . \tag{11}$$

Als het medium compressibel is kan $n_1 \neq n_0$ zijn dan geldt

$$v_D n_0 L = v_1 n_1 \ell . \tag{12}$$

De snelheid v_1 waarmee de materie uit de laag wordt weggeschoten wordt bepaald door de druk in de laag. Deze is ongeveer gelijk aan de magnetische druk omdat druk-evenwicht geldt in de y-richting.

$$p_1 = p_0 + \frac{B_0{}^2}{8\pi} . \tag{13}$$

Als in het plasma buiten de laag $\frac{B_0{}^2}{8\pi} >> p_0$ geldt $p_1 \approx \frac{B_0{}^2}{8\pi}$.

Dit betekent dat de uitstroomsnelheid ongeveer gelijk is aan de Alfvén snelheid.

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi \mu n_1}} , \tag{14}$$

waarbij μ de massa van een proton is.

Uit (11) t/m (14) volgt dan

$$\ell = \left(\frac{n_0 \; L}{n_1 \; 4\pi \; \sigma \; v_A} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{15}$$

De maximale snelheid waarmee dit proces kan plaatsvinden wordt natuurlijk weer bepaald door de diffusietijd (vgl. 3) die met (15) wordt:

$$\tau_D = \frac{n_0}{n_1} \frac{L}{v_A} . \tag{16}$$

Bij een compressie $\frac{n_1}{n_0} = 100$ en $L = 10^9$ cm en $v_A \approx 10^6$ cm/sec is $\tau_D = 10$ sec , hetgeen zeker niet erg klein is. De diffusiesnelheid is echter vergeleken met de Alfvén-snelheid wel klein:

$$v_D = \frac{1}{4\pi \; \sigma \; \ell} = \left(\frac{n_1}{n_0} \cdot \frac{v_A}{4\pi \; \sigma \; L} \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{17}$$

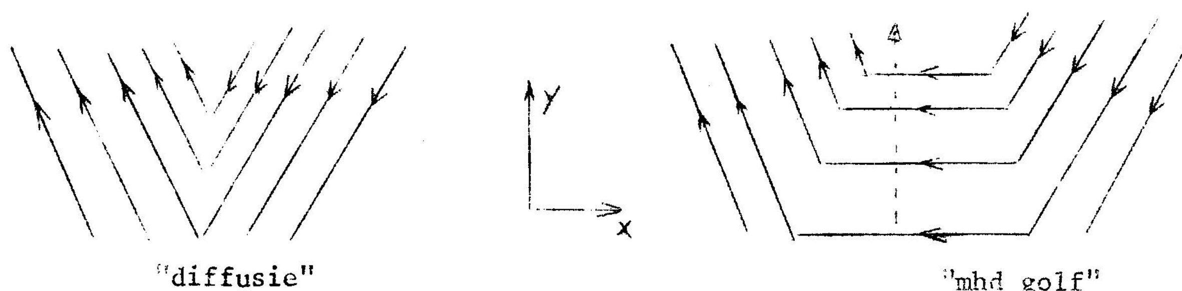
Als $M_0 = \frac{v_D}{v_A}$ het magnetische Mach getal van de instroming is en $R_m = 4\pi \; \sigma \; L \; v_A$ het magnetische Reynoldsgetal, geldt

$$M_0 = \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^{\frac{1}{2}} (R_m)^{-\frac{1}{2}} . \tag{18}$$

In het algemeen is R_m groot, bijv. $R_m = 10^{11}$ als $L = 10^9$, $v_A = 10^6$ en $\sigma = 10^{-5}$. Dan is $M_0 \approx 10^{-4} - 10^{-5}$. Dus de instroming geschiedt zeer langzaam en is geheel bepaald door L en de Alfvénsnelheid v_A . Merk op dat ook in dit proces ℓ heel klein is. Uit (15) volgt $\ell \approx 10^{2\frac{1}{2}}$ cm .

6.2.1. Het mechanisme van Petschek

Petschek wees er op dat bij het proces van de annihilatie van veldlijnen in het algemeen reconnectie zal optreden en dientengevolge de annihilatie niet alleen door diffusie bepaald is, maar ook door hydromagnetische effecten. Dit is vooral belangrijk als de veldlijnen een hoek met elkaar maken.



figuur 10

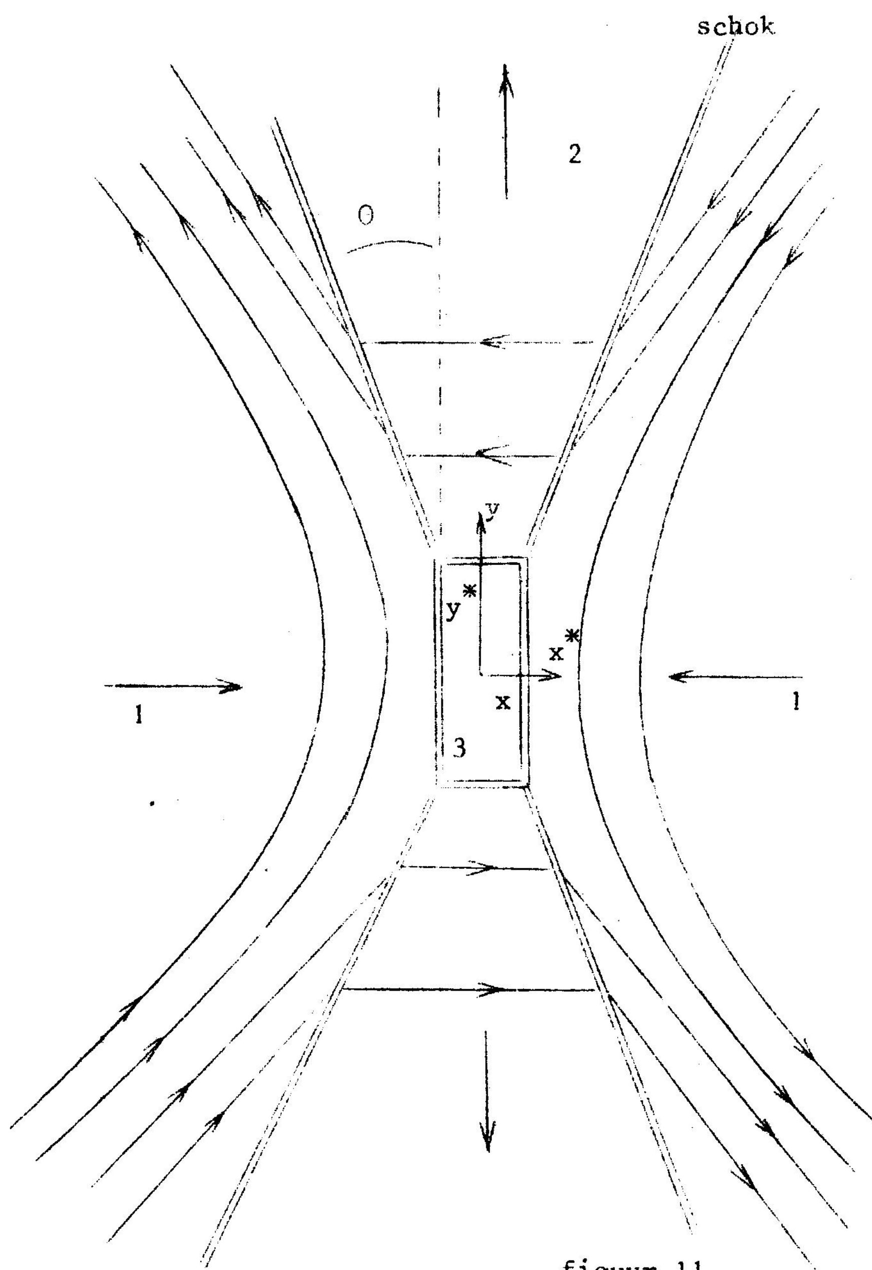
In bovenstaande figuur zal aanvankelijk de diffusie er voor zorgen dat de scherpe hoek tussen de krachtlijnen wordt afgestompt. Later zal de storing (en dus de afvlakking) zich als een magnetohydrodynamische golf voortplanten.

In feite planten zich twee m.h.d.-schokgolven langs de veldlijnen voort. Deze schokgolven kunnen alleen op hun plaats blijven als het plasma met de veldlijnen naar de y-as wordt toegebracht.

Petschek rekende de maximale annihilatie uit in een stationaire situatie. Daartoe verdeelde hij het gebied in drie delen:

1. een gebied waar het plasma langs de x-as naar binnen stroomt;
2. een gebied waar het plasma langs de y-as naar buiten stroomt;
3. een diffusiegebied $x^* y^*$ zodanig, dat voor $|x| < x^*$ en $|y| < y^*$ de stroming door diffusie is bepaald.

Gebieden 1 en 2 zijn door een stationaire schokgolf gescheiden



figuur 11

Als we aannemen dat in gebied 1 de snelheid alleen een component in de x-richting heeft, kan uit de schokrelaties voor m.h.d.-schokken worden afgeleid dat $\underline{B}_2 = (B_{2x},0)$ met $B_{2x} = B_{1x}$. Dus de x-component van het magnetische veld blijft ongewijzigd terwijl de y-component verdwijnt.

De schokgolf plant zich langs de veldlijnen met de snelheid

$v_A = \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\,\rho}}$ voort. Dat betekent dat alleen een stationaire oplossing mogelijk is als het plasma in gebied 1 met een snelheid v_1 instroomt , welke snelheid gelijk is aan $v_1 = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\,\rho}}$. Definiëren we het Mach getal als

$$M = \frac{v_1}{v_A}\,, \tag{19}$$

dan geldt $v_1 = M\,v_A$.
Uit de continuïteitsvergelijking volgt:

$$v_1\,y = v_2\,x\,. \tag{20}$$

Uit het impulsbehoud in de y-richting volgt in het geval van een stationaire stroming:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\rho\,v_2{}^2\,x) = -\frac{B_y\,B_x}{4\pi}\,. \tag{21}$$

De term rechts in (21) is de Lorentzkracht $(\underline{j}\times\underline{B})_y$ geïntegreerd over de schok

$$(\underline{j}\times\underline{B})_y = \frac{1}{4\pi}\int(\underline{B}\times\nabla\times\underline{B})_y\,dx = -\frac{1}{4\pi}\int B_x\frac{\partial B_y}{\partial x}\,dx =$$

$$= -\frac{B_x}{4\pi}\int\partial B_y = -\frac{B_y\,B_x}{4\pi}\,, \tag{22}$$

omdat B_x over de schok constant is.
Uit (19), (20) en (21) volgt

$$M\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^2}{x}\right) = 1\,. \tag{23}$$

Uit vgl. (23) volgt

$$x = M\,|y|\,. \tag{24}$$

Dit betekent dat de dikte van de grenslaag tussen de schokken lineair toeneemt met y . Hierbij is verondersteld dat $v_1 \neq v_1(y)$ en $\rho \neq \rho(y)$.
Uit (20) en (24) volgt direct met (19):

$$v_2 = v_A . \tag{25}$$

Dus de materie stroomt met de Alfvén snelheid het gebied 2 uit.

In de buurt van het x-type neutrale punt overheerst de diffusie. Hier moeten we weer de stromingssnelheid v_1 gelijkstellen aan de diffusiesnelheid

$$v_1 = \frac{1}{4\pi\, \sigma\, x^*} , \tag{26}$$

of met (19)

$$M = \frac{1}{4\pi\, \sigma\, v_A\, x^*} . \tag{27}$$

Wordt op grote afstand het Mach-getal bepaald door (19), dus $M = \frac{B_x}{B_y}$, vlak bij het neutrale punt wordt de dikte van het diffusiegebied bepaald door (27). Als M gegeven en v_A gegeven is x^* bepaald door

$$x^* = \frac{1}{4\pi\, \sigma\, v_A\, M} . \tag{28}$$

Substitueren we deze waarde voor x^* in vergelijking 24, dan vinden we voor y^*

$$y^* = \frac{1}{8\pi\, \sigma\, v_A\, M^2} . \tag{29}$$

Voor $y < y^*$ hebben we een door de diffusie bepaalde oplossing en voor $y > y^*$ een door de golf bepaalde oplossing. Het voornaamste effect van dit door Petschek ingevoerde model is dat het de lengte van het diffusiegebied reduceert in vergelijking met het Sweet-Parker model. Hier was de maximale annihilatie bepaald door het Reynolds getal $R_m = 4\pi\, \sigma\, L\, v_A$.
In het Petschek model stelt de stroming zich zo in dat bij gegeven instroomsnelheid y^* bepaald is.
Is v_1 groter dan het maximum, gegeven in vgl. (18), dan zal $y^* < L$ worden en voor $y > y^*$ het proces zonder diffusie verlopen.
Bedenk dat hoewel diffusie natuurlijk wel een rol speelt, het proces niet alleen door de diffusie wordt bepaald. Petschek rekent uit dat de maximale annihilatiesnelheid wordt bepaald door de verhouding L / y^* met L weer de lengte in de y-richting van de schok.

$$M_{max} = \frac{\pi}{4\, \ln\left(\frac{L}{y^*}\right)} . \tag{30}$$

Met y^* gegeven door (29) vinden we voor M_{max}

$$M_{max} = \frac{\pi}{4 \ \ell n \ (8\pi \ \sigma \ v_A \ L \ M_{max}{}^2)} \tag{31a}$$

of ook

$$M_{max} = \frac{\pi}{4 \ \ell n \ (2 \ R_m \ M_{max}{}^2)} \ . \tag{31b}$$

Het is duidelijk dat het geleidingsvermogen wel een grens stelt aan M_{max} maar vergelijken we (31b) met (18) dan zien we dat in formule (31b) M_{max} slechts logarithmisch van het magnetische Reynoldsgetal afhangt en in (18) omgekeerd evenredig met de wortel uit R_m is. Hier is dus een grote winst geboekt met betrekking tot de annihilatiesnelheid. Vergelijking 31b is een impliciete uitdrukking voor M_{max} . Voor grote Reynoldsgetallen (grote σ) is $M_{max} >> M_0$.

In het geval van een compressibel plasma gaat de beschouwing op dezelfde manier. Men vindt dan:

$$M_{max} = \frac{\pi}{2(1 + \alpha) \ \ell n \ (2 \ R_m \ \alpha \ M_{max}{}^2)} \ , \tag{32}$$

met $\alpha = \dfrac{n_2}{n_1}$.

Stel $R_m = 10^{11}$ dan $\ell n \ (2 \ R_m \ M_{max}{}^2) \approx 10$ en we zien dat $M_{max} \approx 0.1$, een resultaat dat later door Priest en door Parker ook wordt vermeld.
Dit is echter veel sneller dan in het sweet mechanisme waar
$M_0 \approx R_m^{-\frac{1}{2}} \approx 10^{-5\frac{1}{2}}$. De annihilatie-snelheid is een factor 30 000 groter.
Aan het Petschek-model is uitvoerig gewerkt door Yeh en Axford (1970), Priest (1972, 1975), Sonnerup (1969), Parker (1973).

6.3. Plasma turbulentie en deeltjesversnelling

De stroomdichtheden in neutrale lagen kunnen zo groot worden dat de electronendriftsnelheden, v_D , vergelijkbaar worden met de ionen-, respectievelijk electronen thermische enelheden. Als dat gebeurt kunnen gemakkelijk p plasmagolven worden opgewekt die

a) makkelijk hun energie kunnen overdragen aan snellere deeltjes (versnelling);

b) het geleidingsvermogen sterk reduceren waardoor grotere dissipatie optreedt (verhitting).

Het opwekken van plasmagolven gebeurt zodra

$$v_D > v_{phase} , \tag{1}$$

waarbij v_{phase} de fasesnelheid van plasmagolven is. In een magnetisch plasma kunnen zeer veel verschillende golfmodi worden aangeslagen; we zullen ons daarom beperken tot een niet magnetisch plasma.

Hierin kunnen zich twee soorten longitudinale plasmagolven voortplanten, nl.

1. De Langmuir golven en
2. De ion-acoustische golven.

Voor Langmuir golven is de dispersievergelijking

$$\omega^{\ell}(k) = \left(\omega_{pe}^2 + 3 v_{Te}^2 k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \approx \omega_{pe} + \frac{3 v_{Te}^2 k^2}{2 \omega_{pe}} , \tag{2}$$

waarin $\omega_{pe} = \left(\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e} \right)^{\frac{1}{2}} = 5.65 \times 10^4 n_e^{\frac{1}{2}} \sec^{-1}$ de electron plasmafrequentie is, $v_{Te} = \sqrt{\frac{k\, Te}{m_e}}$ de electronen thermische snelheid en k het golfgetal. In het algemeen is $\omega_{pe} >> \frac{3 v_{Te}^2 k^2}{2 \omega_{pe}}$ zodat $\omega^{\ell}(k) \approx \omega_{pe}$.

De fase snelheid van de Langmuir golven

$$v_e \approx \frac{\omega_{pe}}{k} . \tag{3}$$

Voor ion-acoustische golven is de dispersievergelijking

$$\omega^{s}(k) = \frac{v_s k}{\sqrt{1 + (k d_e)^2}} + \frac{3 v_{Ti}^2 k^2}{2 \omega_{pi}} , \tag{4}$$

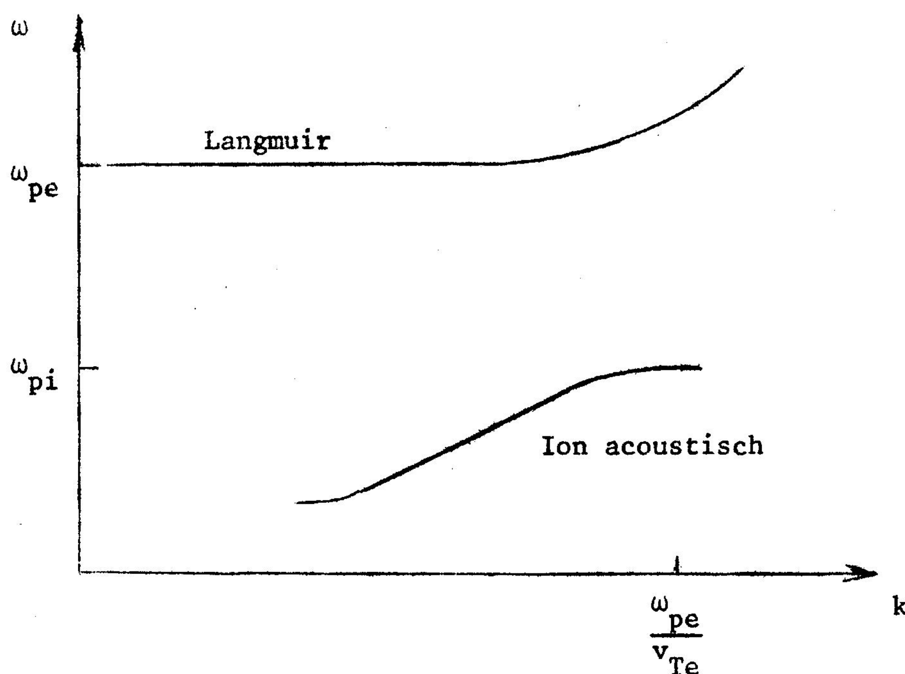
waarin $v_s = \sqrt{\frac{k\, Te}{m_i}}$ de ionengeluidssnelheid is, $d_e = \frac{v_{Te}}{m_i}$ de Debye lengte, v_{Ti} de ionenthermische snelheid en ω_{pi} de ionenplasmafrequentie.

We gaan niet verder op het gedrag van deze golven in maar vermelden hier alleen dat ion-acoustische golven zich alleen maar kunnen voortplanten als $Te >> Ti$. Beide typen golven kunnen zeer sterk gedempt worden door de interactie met deeltjes die ongeveer dezelfde snelheid hebben als de golf (Landaudemping). Anderzijds kunnen deze golven natuurlijk net zo gemakkelijk worden opgewekt door deeltjes die ongeveer even snel zijn als de golf. (Cerenkov conditie). Demping of emissie hangt af van de gradiënt van de verdelingsfunctie $f(\underline{v})$ bij de fasesnelheid

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{v_{ph}} > 0 \rightarrow \text{emissie} .$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{v_{ph}} < 0 \rightarrow \text{demping} . \qquad (5)$$

In onderstaande figuur is het verband tussen ω en k voor beide golftypen aangegeven.



figuur 12

Als de stroomdichtheid toeneemt zal eerst een moment optreden dat $v_D \approx v_s$ zodat ion-acoustische golven worden opgewekt.

Het belangrijkste effect hiervan is dat het geleidingsvermogen sterk gereduceerd is

$$\sigma^* = \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi\, \nu_T} \approx 10\, \omega_{pe} \frac{v_{Te}}{v_D} . \qquad (6)$$

Dus $\sigma^* \approx 100\ \omega_{pe}$ omdat $v_s \approx \frac{v_{Te}}{10}$.

De vrijgekomen energie is dan vele malen groter dan zonder plasmaturbulentie (d.i. een toestand zonder een spectrum van plasmagolven).

Laten we nu eens nagaan hoe groot de stroomdichtheid moet zijn opdat anomale geleiding een rol kan spelen en of deze toestand kan voorkomen in de zon.

Als $j = ne\, v_D$ en $j = \frac{c}{4\pi}\frac{\partial B}{\partial x} \approx \frac{cB}{4\pi\ell}$ betekent $v_D = v_s$ dat

$$\frac{cB}{4\pi\, ne\, \ell\, v_s} \approx 1 . \tag{7}$$

Als in een stroomlaag drukevenwicht heerst en $B(x=0) = 0$ geldt

$$\frac{B^2}{8\pi} = 2\, n\, k\, T . \tag{8}$$

Uit (7) en (8) volgt

$$B\, \ell \frac{v_s}{T} = 3.5 \times 10^4 . \tag{9}$$

Met $T = 2 \times 10^6$ K en $v_s = 1.5 \times 10^7$ cm/sec volgt uit (9)

$$B\, \ell = 5 \times 10^3 . \tag{10}$$

Dus als $B = 100$ gauss geldt $\ell = 50$ cm . Er zijn sterke veldgradiënten nodig om ion-acoustische turbulentie te krijgen. De reden hiervoor is dat de dichtheid in de neutrale laag bepaald is door de magnetische druk. Eigenlijk zou de dichtheid veel lager moeten kunnen zijn. Dit is in een neutrale laag niet mogelijk, maar wel in een stroomlaag waar nergens $B = 0$ en de dichtheid vrijwel onafhankelijk is van de veldsterkte.

Het electrische veld in een stroomlaag versnelt een deeltje, maar als E klein is verliest het versnelde electron z'n juist gewonnen impuls door botsingen. De wrijvingskracht t.g.v. botsingen is evenredig met v^{-2} als $v > v_{Te}$. Dit betekent dat er een zeker aantal deeltjes is dat steeds meer impuls wint en dus "runaway" wordt.

Men spreekt van het runaway of Dreicer electrische veld als het veld waarvoor de deeltjes als het ware wegvliegen (runaway)

$$E_D = \frac{e\, \omega_{pe}^2}{v_{Te}^2} . \tag{11}$$

Bedenk dat als $E < E_D$ er altijd een aantal deeltjes zullen zijn die snel genoeg vliegen om versneld te worden.

Deze snelle deeltjes vormen een bundel met $v > v_{Te}$ en zullen dus Langmuir golven opwekken. Al veel eerder kunnen ion-acoustische golven worden opgewekt. Dus het geleidingsvermogen is al gereduceerd en dus

$$E^* = \frac{j}{\sigma^*} >> \frac{j}{\sigma} = E \,, \qquad (12)$$

als j bepaald is door uitwendige condities zoals het magnetische veld.

Bovendiën veroorzaakt de ion-acoustische turbulentie een verhitting waardoor E_D daalt en de verhouding E / E_D zeer sterk stijgt. Het resultaat is een bundel snelle electronen die Langmuir golven opwekken bij een golfgetal $k_g \approx \frac{\omega p}{v}$ waarbij v de snelheid van de electronen is.

Zolang de energiedichtheid van de plasmagolven laag is zal door verstrooiing van de plasmonen aan de Debye wolk rond de ionen de energie W_k^ℓ van de plasmonen geleidelijk naar lagere golfgetallen (grotere golflengten) verschuiven.

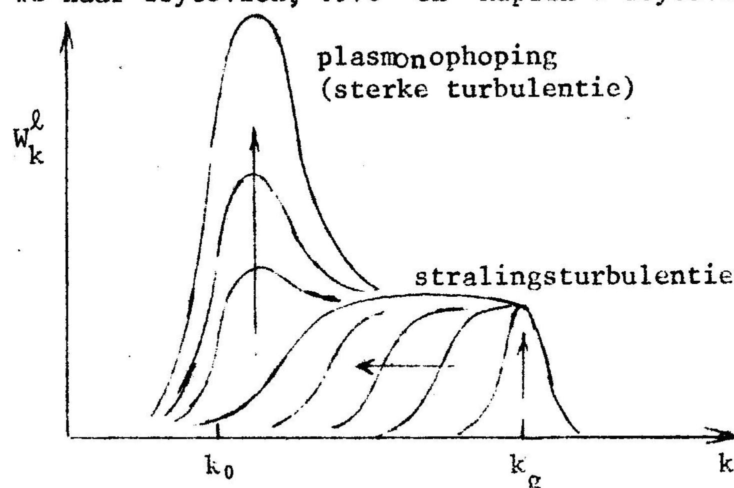
Dit proces gaat net zo lang door tot een kleinste golfgetal k_0 wordt bereikt, waarbij de plasma-interacties zodanig gecompliceerd worden dat verdere verschuiving niet meer mogelijk is. In principe zou $k_0 = \frac{\omega p}{c}$ kunnen zijn, maar reeds voor die tijd treden allerlei verzadiginsprocessen op.

Als reeds ver voor k_0 wordt bereikt de golfenergie wordt uitgestraald (plasmastraling) spreekt men van stralingsturbulentie. Is het plasma een inefficiënte straler, dan zal de bij k_g ingevoerde energie zich bij k_0 ophopen totdat $W_k^\ell(k_0)$ zo groot wordt dat men niet meer van zwakke plasmaturbulentie kan spreken.

Als

$$\frac{W_k^\ell\,(k_0)}{n\,k\,T} \lesssim 1 \,, \qquad (13)$$

spreekt men van sterke plasmaturbulentie. Het energietransport vindt dan plaats van kleine k naar grote k . Voor een bespreking van dit effect verwijzen we naar Tsytovich, 1970 en Kaplan & Tsytovich, 1974.



figuur 13

De figuur op blz. 21 geeft het energietransport weer. het energietransport van k_g naar k_0 "ontmoeten" de plasmonen steeds minder deeltjes met steeds hogere snelheid waarmee ze in interactie kunnen komen. De plasmonen zullen dus een beetje gedempt worden (Landau demping), waardoor de snelle deeltjes nog sneller zullen gaan bewegen. Er treedt dus versnelling op. Bedenk dat

$$v' = \frac{\omega_{pe}}{k} > \frac{\omega_{pe}}{k_g} = v \tag{14}$$

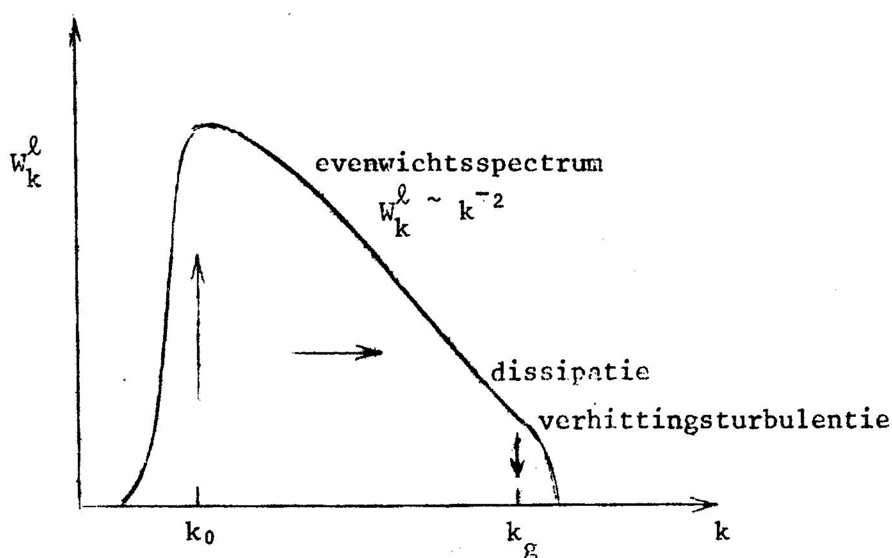
als $k < kg$.

De conclusie is dat bij zwakke plasmaturbulentie er een klein aantal deeltjes is dat tot zeer hoge snelheden kan worden versneld.

De overgrote meerderheid van de deeltjes (thermische plasma) bevindt zich rond v_{Te} of in de k-ruimte bij $k \approx \omega_{pe} v_{Te} \approx k_g$. Zodra het moment optreedt waarop de plasmaturbulentie zo sterk wordt dan van energieomkering kan worden gesproken, "stroomt" energie terug van de energierijke plasmonen rond k_0 naar de plasmonen rond k_g .

Als $W_k^\ell \approx n\, k\, T$ kan het thermische plasma worden verhit. Men spreekt dan van verhittingsturbulentie door plasmonen (Langmuir plasmonen). Er treedt dan evenwicht in tussen thermische plasma en plasmaturbulentie en een thermalisatie zorgt er voor dat geen verdere deeltjesversnelling meer optreedt.

Onderstaande figuur laat het energietransport zien voor sterke plasmaturbulentie.



figuur 14

Er stelt zich dan een evenwichtsspektrum in volgens in volgens Kolmogoroff. Voor plasmaturbulentie is dit spektrum gegeven door

$$W_k^{\ell} \sim k^{-2} . \tag{15}$$

(Een Kolmogoroff spectrum)

Als conclusie kunnen we stellen dat bij voldoend hoge stroomdichtheden in het vlamplasma achtereenvolgens efficiënte versnelling van deeltjes plaats vindt gevolgd door verhitting van het plasma zoals dit ook is waargenomen in zonnevlammen.

Men vermoedt dat de stralingsprocessen pas belangrijk worden als de sterke verhitting van het plasma plaats vindt.